Funktionen

Erinnerung: Ein *Paar* ist definiert durch $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definition: Betrachte Mengen X und Y. Eine Teilmenge $GX \times Y$ mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X\, \exists! y \in Y \colon \langle x, y\rangle \in G$$

heisst eine *Funktion*. Oft bezeichnen wir diese mit $g\colon X \to Y$ und schreiben für $\langle x, y\rangle \in G$ kurz $g(x) = y$.

Proposition-Definition: Zu jeder solchen Funktion g gehört ein *Definitionsbereich*, nämlich die Menge

$$\mathrm{Def}(g) \;=\; X \;:=\; \Big\{x \in \bigcup\bigcup G \;\Big|\; \exists y \colon \langle x, y\rangle \in G\Big\}.$$

Vorsicht: In dieser Theorie ist der Zielbereich der Funktion durch den Graphen nicht eindeutig bestimmt.

Proposition-Definition: Für jede solche Funktion und jeder Teilmenge $X' \subseteq \mathrm{Def}(g)$ erhalten wir die *auf X' eingeschränkte Funktion* $g|X'$ mit dem Graphen

$$G \cap \Big(X' \times \bigcup\bigcup G\Big).$$

Klassenfunktionen

Definition: Betrachte eine Formel $\varphi(x, y)$ mit freien Variablen x und y, so dass wir beweisen können:

$$\forall x\, \exists! y\colon \varphi(x, y).$$

Die Abbildung F, welche in einem Modell unserer Theorie jedem x das durch diese Formel charakterisierte Element $F(x) := y$ zuordnet, heisst die durch φ bestimmte *Klassenfunktion* oder *Operation*.

Vorsicht: Dies ist keine Menge, also keine Funktion wie oben **innerhalb** unserer Theorie!

Vorsicht: Wenn man von einer Klassenfunktion spricht, meint man eigentlich die dahinterstehende Formel.

Beispiel: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$ einer Menge x ist charakterisiert durch die Formel

$$\mathcal{P}(x) = y \iff \varphi(x, y) \;:=\; (\forall z\colon z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x).$$

Beispiel: Die Vereinigungsmenge $\bigcup x$ einer Menge x ist charakterisiert durch die Formel

$$\bigcup x = y \iff \varphi(x, y) \;:=\; \big(\forall z\colon z \in y \longleftrightarrow (\exists t\colon t \in x \wedge z \in t)\big).$$

Ersetzungsaxiom: Für jede Klassenfunktion F und jede Menge A ist $\{F(x) \mid x \in A\}$ eine Menge; genauer: Es existiert eine Menge B mit der Eigenschaft

$$\forall y\colon \big(y \in B \longleftrightarrow \exists x \in A\colon \varphi(x,y)\big).$$

Durch das Extensionalitätsaxiom ist diese eindeutig bestimmt.

Folge: Für jede Klassenfunktion F und jede Menge A ist $F|A$ eine Funktion, genauer: Es existiert genau eine Menge G, welche der Graph einer Funktion ist, und für die gilt

$$\forall x\, \forall y\colon \langle x,y\rangle \in G \longleftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x,y)).$$

Bedeutung: Eine Klassenfunktion induziert also auf jeder Menge eine echte Funktion im Sinne unserer Theorie. Auf diese können wir alle Methoden der Mengenlehre anwenden, auf die Klassenfunktion dagegen nicht.

Variante: Wendet man das Obige an auf Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$, so erhält man n-stellige Funktionen und Klassenfunktionen.

Ordnungsrelationen

Definition: Eine *Ordnung* oder *Partialordnung* auf einer Menge X ist eine zweistellige Relation $\leqslant$ mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \forall x \in X\colon &\quad x \leqslant x && \text{(Reflexivität)} \\ \forall x, y \in X\colon &\quad x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant x \ \longrightarrow \ x = y && \text{(Antisymmetrie)} \\ \forall x, y, z \in X: &\quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \ \longrightarrow \ x \leqslant z && \text{(Transitivität)} \end{aligned}$$

Eine *Totalordnung* oder *lineare Ordnung* ist eine Ordnung, für die zusätzlich gilt:

$$\forall x, y \in X\colon \quad x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x. \qquad \text{(Totalität)}$$

Im folgenden fixieren wir eine Menge X mit einer Ordnung $\leqslant$.

Definition: Für alle $x, y \in X$ definieren wir

$$\begin{aligned} x \geqslant y &\quad :\Longleftrightarrow \quad y \leqslant x \\ x < y &\quad :\Longleftrightarrow \quad (x \leqslant y) \wedge (x \neq y) \\ x > y &\quad :\Longleftrightarrow \quad y < x \end{aligned}$$

Die Relation $<$ heisst die zu $\leqslant$ gehörende *strikte Ordnung*.

Übung: Formuliere äquivalente Axiome für $<$ anstatt $\leqslant$.

Definition: Ein Element $x \in X$ mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{ll}
\forall y \in X\colon\ x \leqslant y & \text{heisst ein } \textit{kleinstes Element} \text{ von } X. \\
\forall y \in X\colon\ y \leqslant x & \text{heisst ein } \textit{grösstes Element} \text{ von } X. \\
\forall y \in X\colon\ y \leqslant x \longrightarrow y = x & \text{heisst ein } \textit{minimales Element} \text{ von } X. \\
\forall y \in X\colon\ x \leqslant y \longrightarrow y = x & \text{heisst ein } \textit{maximales Element} \text{ von } X.
\end{array}$$

Proposition: Existiert ein kleinstes (bzw. grösstes) Element, so ist es eindeutig bestimmt.

Proposition:

(a) Jedes kleinste Element von X ist minimal.

(b) Jedes grösste Element von X ist maximal.

Proposition: Ist $\leqslant$ eine Totalordnung, so gilt:

(a) Ein Element $x \in X$ ist ein kleinstes Element genau dann, wenn es minimal ist.

(b) Ein Element $x \in X$ ist ein grösstes Element genau dann, wenn es maximal ist.

Vorsicht: Ist $\leqslant$ keine Totalordnung, so kann es mehrere minimale (bzw. maximale) Elemente geben.

Beispiele:

(a) $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ist eine Totalordnung ohne minimales oder maximales Element.

(b) $([0, \infty[, \leqslant)$ ist eine Totalordnung mit minimalem Element 0 aber ohne maximales Element.

(c) $([0, 1], \leqslant)$ ist eine Totalordnung mit minimalem Element 0 und maximalem Element 1.

(d) $(\varnothing, \leqslant)$ ist eine Totalordnung ohne minimales oder maximales Element.

(e) Die Menge aller abzählbar unendlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Inklusionsrelation $\subseteq$ ist eine nicht totale Partialordnung ohne minimales oder maximales Element.

Sei jetzt X eine Menge mit mehr als einem Element.

(f) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist eine nicht totale Ordnung mit kleinstem Element $\varnothing$ und grösstem Element X.

(g) $(\mathcal{P}(X) \smallsetminus \{\varnothing, X\}, \subseteq)$ ist nicht totale Ordnung ohne kleinstes oder grösstes Element.

Betrachte eine Menge X mit Partialordnung $\leqslant$ und eine Teilmenge $Y \subseteq X$.

Proposition-Definition:

(a) $\leqslant \cap (Y \times Y)$ ist eine Partialordnung auf Y, genannt die *auf Y induzierte Partialordnung* $\leqslant |Y$.

(b) Ist $\leqslant$ eine Totalordnung, so ist $\leqslant |Y$ eine Totalordnung.

(c) Ist $\leqslant |Y$ eine Totalordnung, so heisst Y eine *Kette*.

(d) Ein Element $x \in X$ heisst *obere Schranke* von Y, falls gilt $\forall y \in Y : y \leqslant x$.

(e) Ein Element $x \in X$ heisst *untere Schranke* von Y, falls gilt $\forall y \in Y : x \leqslant y$.

(f) Die Menge Y heisst ein *Anfangssegment von X*, falls gilt $\forall y \in Y\, \forall x \in X : (x \leqslant y \longrightarrow x \in Y)$.

(f) Jedes $x \in X$ bestimmt die Anfangssegmente

$$\begin{aligned} X_{\leqslant x} &:= \{x' \in X \mid x' \leqslant x\}, \\ X_{<x} &:= \{x' \in X \mid x' < x\}. \end{aligned}$$

Wohlordnungen

Für das folgende siehe auch [Ebbinghaus: Einführung in die Mengenlehre, Kapitel VI].

Definition: Eine *Wohlordnung* auf einer Menge X ist eine Totalordnung, für die jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Beispiel: (a) Für jede natürliche Zahl n die Menge $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit der üblichen Relation $\leqslant$.

(b) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der üblichen Relation $\leqslant$. *(später)*

Proposition: Jede Teilmenge X' einer Wohlordnung X ist eine Wohlordnung.

Erinnerung:

Beweis durch vollständige Induktion: Um für jede natürliche Zahl n eine Aussage $A(n)$ zu beweisen, genügt es, für jedes n zu zeigen:

Gilt $A(n')$ für alle $n' \geqslant 0$ mit $n' < n$, so gilt auch $A(n)$.

Konstruktion durch Rekursion: Um für jede natürliche Zahl n ein mathematisches Objekt $B(n)$ zu konstruieren, genügt es, für jedes n

eine Konstruktion von $B(n)$ unter Benützung von $B_(n')$ für alle $n' < n$ anzugeben.

Satz: *(Induktion über eine Wohlordnung)* Für jede wohlgeordnete Menge X und jedes einstellige Prädikat P gilt

$$\big[\forall x \in X\colon\ (\forall y \in X_{<x}\colon P(y)) \longrightarrow P(x)\big] \longrightarrow \big[\forall x \in X\colon\ P(x)\big].$$

Rekursionstheorem: Für jede wohlgeordnete Menge X und jede zweistellige Klassenfunktion F existiert eine eindeutige Funktion f mit Definitionsbereich X, so dass gilt:

$$\forall x \in X\colon f(x) = F(x, f|X_{<x}).$$

Bemerkung: Eigenschaften der so konstruierten Funktion beweist man durch Induktion über die Wohlordnung: Sei zum Beispiel $P(x)$ ein Prädikat (eventuell mit Parametern) mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X\, \forall g \text{ Funktion auf } X_{<x}\colon \big(\forall y \in X_{<x}\colon P(g(y))\big) \longrightarrow P(F(x, g)).$$

Mit Induktion folgt dann $\forall x \in X\colon P(f(x))$.

Beispiel: Sei Z eine Menge, so dass für jedes $x \in X$ und jede Funktion g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Y$ gilt $\mathrm{Bild}(F(x, g)) \subseteq Y$. Dann gilt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq Z$.